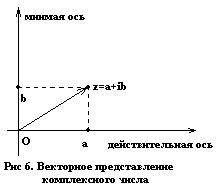
Задание № 21 Комплексные числа в геометрической форме

*Задание может быть выполнено либо в формате документа Word, либо в виде фотографии выполненного на бумаге решения.*

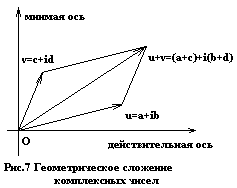
При векторном представлении комплексного числа положение точки , соответствующей комплексному числу  на комплексной плоскости задается радиус-вектором**.**

Каждому радиус-вектору  на комплексной плоскости соответствует ровно одно комплексное число (взаимно однозначное соответствие).

Модуль (длина) радиус-вектора  называется модулем комплексного числа . Положение радиус-вектора  относительно действительной оси определяется углом  с положительным направлением отсчета против часовой стрелки.

Из определений сложения векторов и сложения комплексных чисел следует, что сложение комплексных чисел можно производить геометрически как сложение соответствующих им векторов (рис.7).

Алгебраическое и векторное представление комплексного числа позволяет перейти к тригонометрической форме этого числа.

Из рисунка следует, что , , откуда получаем: . Угол  называется *аргументом* комплексного числа.

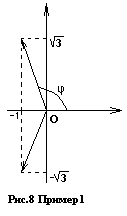
Комплексное число в тригонометрической форме в общем случае имеет бесконечное число аргументов, которые отличаются друг от друга на целое число оборотов (, где  - число полных оборотов радиус-вектора вокруг начала координат). Чтобы значение аргумента было однозначным, выделяют *главное значение* аргумента  или . Таким образом, в общем случае

.

При использовании главного значения аргумента получим

.

*Пример1:* Сопряженные комплексные числа  и  изобразить на комплексной плоскости и представить в тригонометрической форме, используя главные значения аргумента.

*Решение:* Модуль комплексного числа . Для числа  имеем: , . Поскольку синус положителен, а косинус отрицателен, радиус-вектор числа  расположен во втором координатном углу (втором *квадранте* координатной плоскости). Таким образом, получаем: . Для числа  имеем: ,  и . Если считать, что , то задача решена. Если же , то угол  не является главным значением аргумента. В этом случае (см. рис) .

Таким образом, сопряженные комплексные числа в тригонометрической форме имеют одинаковые модули, а их аргументы различаются только знаками.

Если главные значения аргумента не соответствуют углам, для которых числовые значения тригонометрических функций известны из школьной математики, то используют тригонометрические таблицы или выражают аргумент через обратные тригонометрические функции .

*Пример2:* Представить комплексное число  в тригонометрической форме, используя главное значение аргумента. Изобразить комплексное число на комплексной плоскости.

*Решение:* . Поскольку , , то радиус-вектор числа расположен во втором квадранте. Арксинус использовать напрямую нельзя, так как по определению . Поскольку , то .



**Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме. Возведение в целую степень**

При умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

При делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

Таким образом, имеет место *формула Муавра*:

при .

*Пример*: Найти , если 

*Решение*: Поскольку , то



**Извлечение корней из комплексных чисел в тригонометрической форме**

Определение: *Корнем степени n из комплексного числа*  называется комплексное число  такое, что .

Очевидно, что если , то число , где под выражением  подразумевается арифметический корень степени n из действительного числа, является корнем степени n из числа .

Кроме того, при любом целом значении числа  комплексное число  также является корнем степени n из числа .

Действительно:

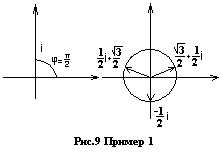




Среди чисел  различными являются только n чисел. Эти числа получаются, если числу  последовательно придавать значения .

Если представить эти корни в виде точек на комплексной плоскости, то эти точки будут лежать на окружности радиуса  с центром в начале координат. При этом указанные точки будут делить окружность на  равных частей.

*Пример1:* Найти . Представить найденные корни в алгебраической форме.

*Решение:* Найдем геометрическую форму числа :

Модуль числа равен 1, аргумент равен , поэтому .

Поскольку извлекается корень третьей степени (), в формуле



надо будет брать три значения: ;

При : ;

При : ;

При : ;

С помощью операции извлечения корня можно решать алгебраические уравнения вида , где  - действительные или комплексные числа.

*Пример2:* найти  при .

*Решение:* найдем сначала геометрическую форму комплексного числа : .

, значит, . Следовательно, .

, .

При : ;

При : ;

**Самостоятельная работа:**

**1.2.1.** Найти геометрическую форму комплексных чисел

а) ; б)  ; в) ; г) ; д) ; е) ; ж) ; з) ;

**1.2.2.** Найти модуль и аргумент комплексных чисел

а) ; б) ; в) ;

**1.2.3.** Для  найти и .

**1.2.4.** Вычислить:

а) ; б); в) ; г) ;

**1.2.5.** Найти все комплексные корни:

а) третьей степени из 1; б) восьмой степени из 1; в) четвертой степени из -1; г) шестой степени из -64; д) третьей степени из ;

**1.2.6.** В предположении, что количество корней уравнения совпадает с его степенью (корни могут быть кратными), найти все корни уравнений

а) ; б) ;

**1.2.7.** Решить уравнения

а) ; б) ; *Указание*: домножить уравнения на 

**Ответы:**

**1.2.1.** а) ; б) ; в) ; г) ; д) ; е) ;

ж) ; з) ;

**1.2.2.** а) ; б) ; в) ;

**1.2.3.** , ;

**1.2.4.** а); б) ; в) ; г) ;

**1.2.5.** Найти все комплексные корни:

а) ;; б) ;

в) ; ; г) ; д) ;

**1.2.6.** а) ;

б) ;

**1.2.7.** а) ; б) ;